



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

نمونه سوال  گام به گام

امتحان نهایی  جزوه

دانلود آزمون های آزمایشی 

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



تابع

فصل سوم

مفهوم تابع

درس ۱

ضابطه جبری تابع

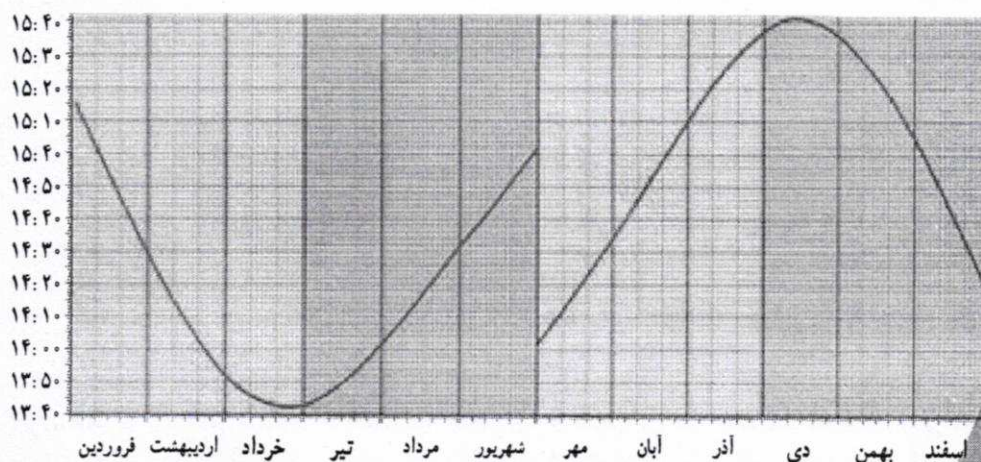
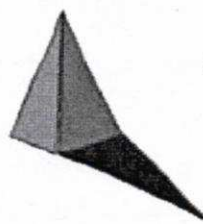
درس ۲

نمودار تابع خطی

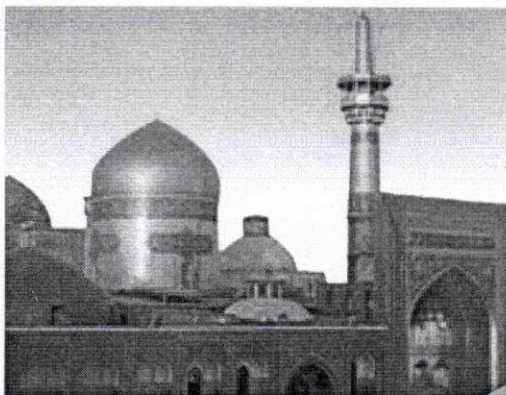
درس ۳

نمودار تابع درجه ۲

درس ۴



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می گیرد.



یکی از شیوه های جهت یابی قبله استفاده از سایه شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می گیرد می توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



درس ۱

مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	۳	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	۴	۵	۸	۹	۱۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) بر اساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به صورت $y=ax+b$ ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله $y=2x+1$ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی $(2x+1)$ ؛ بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها بر اساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۲	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$
y	۱	-۷	-۳	۲	۲	۳	۰

$$y = -2x + 3$$

$$y = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$-2x + 3 = 3 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{-2} \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



او که مبنای جهان، «زوج» آفرید
خود به ما نزدیک‌تر شد از ورید
«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان
تابع منظور ما، «پیوسته» است
«حد»، به آمیالِ دلِ ما بسته است
دل به بالا تا عنایت می‌کند
حدّ تابع، «بی‌نهایت» می‌کند
هر کسی تابی‌نهایت را شناخت
چون «مُجانب» سوی آن بالا شناخت



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

طول قد و نماسوب متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است. آیا می‌توانید با توجه به جدول قبل اگر فردی در گروه سنی ۵۴-۴۵ قرار داشته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی‌متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

$$۲۵ = \text{مناوب}$$

$$۲۵ \times (۱,۸۹)^۲ = ۸۹,۳۰۲۵$$

$$۱۸۹ \div ۱۰۰ = ۱,۸۹ \text{ متر}$$

تبدیل به متر شود

فعالیت



می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً $\pi = ۳/۱۴$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است:

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟ بله

۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟ بله $p = ۲\pi r$

۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟ شعاع (۲) متغیر مستقل

۴. جدول زیر را کامل کنید. محیط (P) و مساحت (S) متغیر وابسته

r بر حسب سانتی‌متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی‌متر مربع (مساحت)	π	$۰,۷۸۵\pi$	۴π	۹π	۱۶π
P بر حسب سانتی‌متر (محیط)	۲π	۳π	۴π	۶π	۸π

در رابطه خطی $y = ۳x + ۱$ نیز y تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است، یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ها را روی محور افقی و y های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (x, y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می‌نامیم. در زوج مرتب (x, y) ، x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم. اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ و برعکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$

منش دوم

یک مثال از تساوی دو زوج مرتب زده شود

فعالیت



۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\sqrt{۲}$	۲
y	-۲	۱	$\frac{۷}{۳}$	۴	$۳\sqrt{۲} + ۱$	۷
(x, y)	$(-۱, -۲)$	$(۰, ۱)$	$(\frac{۲}{۳}, \frac{۷}{۳})$	$(۱, ۴)$	$(\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲} + ۱)$	$(۲, ۷)$

$$۳x + ۱ = ۱ \Rightarrow ۳x = ۰ \Rightarrow x = \frac{۰}{۳} \Rightarrow x = ۰$$

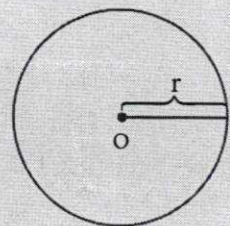
$$۳x + ۱ = ۳\sqrt{۲} + ۱ \Rightarrow ۳x = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

$$y = ۳(۱) + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$$

$$y = ۳(۲) + ۱ = ۶ + ۱ = ۷$$



$$\frac{۲\pi r}{۲r} = \pi$$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کاشانی در اوایل قرن هشتم هـ. ق توانست عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتاب رساله محیطیه خود را با این جمله شروع می‌کند: «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است».

$$y = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} - 1 \quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	1	2	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	...	-1
y	2	5	$\frac{5}{4}$	...	2

$$y = x^2 + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه توده بدنی یا نماتوب (BMI) است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{وزن بر حسب کیلوگرم} = \frac{\text{نماتوب}}{\text{مجدور طول قد بر حسب متر}}$$

با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

الف) شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow$ نماتوب < 19

ب) شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow$ نماتوب $19 \leq$ نماتوب ≤ 25

پ) شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow$ نماتوب $25 \leq$ نماتوب ≤ 30

ت) شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد $\Rightarrow$ نماتوب ≥ 30

گروه سنی	نماتوب
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

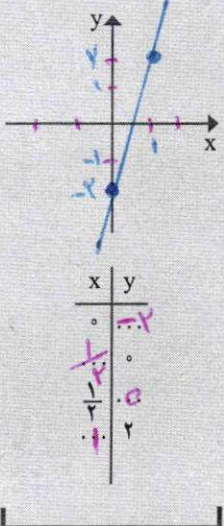
پس از یافتن نماتوب متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{توان دوم یا مربع قد بر حسب متر} \times \text{نماتوب} = \text{وزن مطلوب بر حسب کیلوگرم}$$

با دقت در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز درمی‌یابید که وزن مطلوب به نماتوب نیز بستگی دارد. در فرمول فوق



نمودار خط $y = 4x - 2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید:



$$y = 4(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$y = 4\left(\frac{1}{4}\right) - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

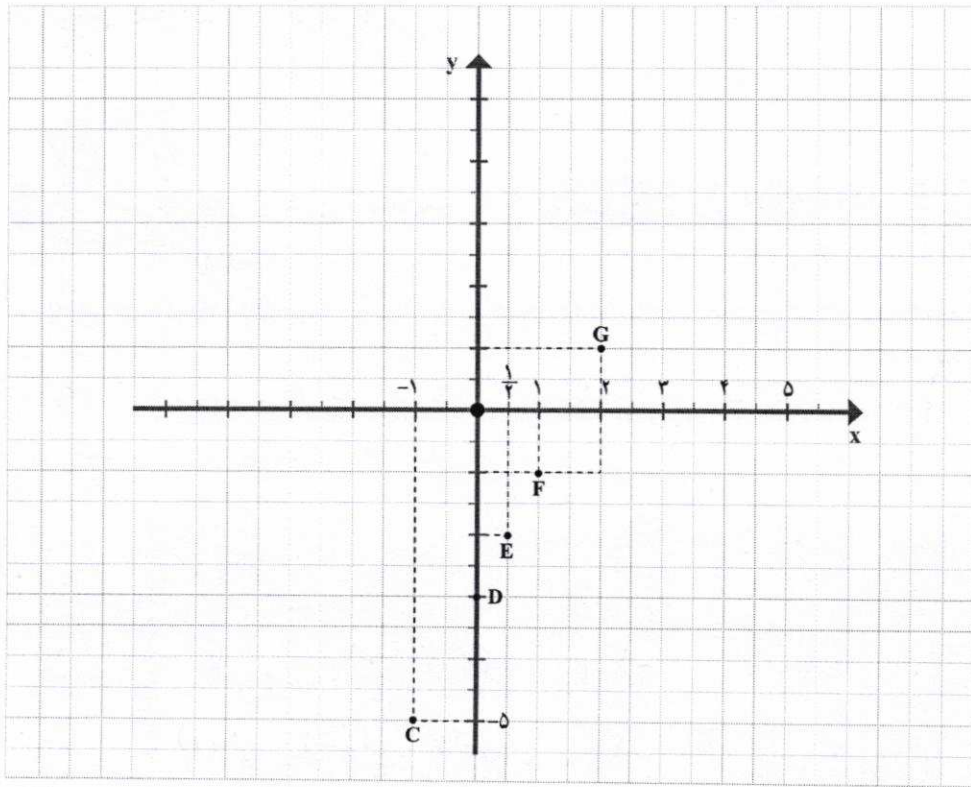
$$4x - 2 = 2 \Rightarrow 4x = 2 + 2 \Rightarrow$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1$$

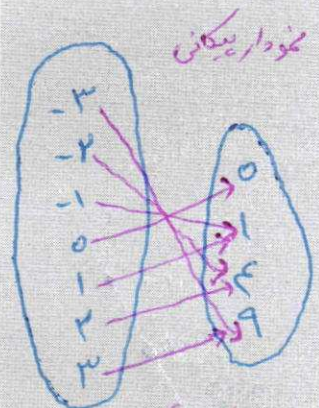
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر هر یک از «زوج مرتب» های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می شود:



$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (-3)^2 = 9 \\ y &= (-2)^2 = 4 \\ y &= (-1)^2 = 1 \\ y &= (0)^2 = 0 \\ y &= (1)^2 = 1 \\ y &= (2)^2 = 4 \\ y &= (3)^2 = 9 \end{aligned}$$



◆ سؤال: برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار بیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

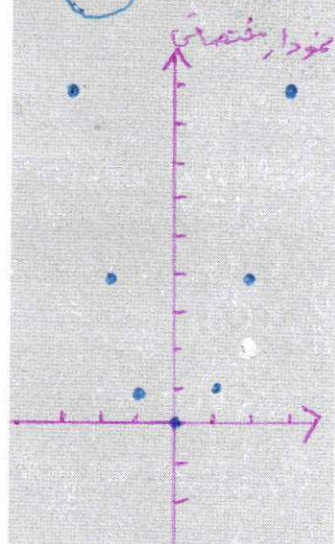
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9
(x, y)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

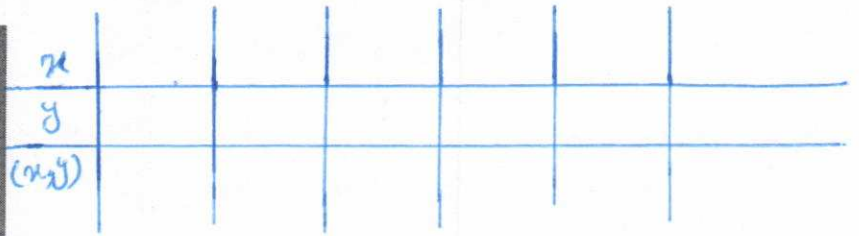
مفهوم تابع

در تمام فعالیت ها، مثال ها و تمرین های قبل، رابطه ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می آید؛ مثلاً در رابطه $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به دست می آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می نامند. به عبارت دقیق تر:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.





۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

استفاده از نمودار و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:

کار در کلاس



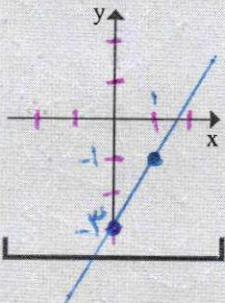
با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

$A = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	
y	-5	-3	-2	-1	1	$y = 2x - 3$
(x, y)	$(-1, -5)$ C	$(0, -3)$ D	$(\frac{1}{2}, -2)$ E	$(1, -1)$ F	$(2, 1)$ G	



نمودار خط $y = 2x - 3$ را
روی دستگاه مختصات
رسم کنید:



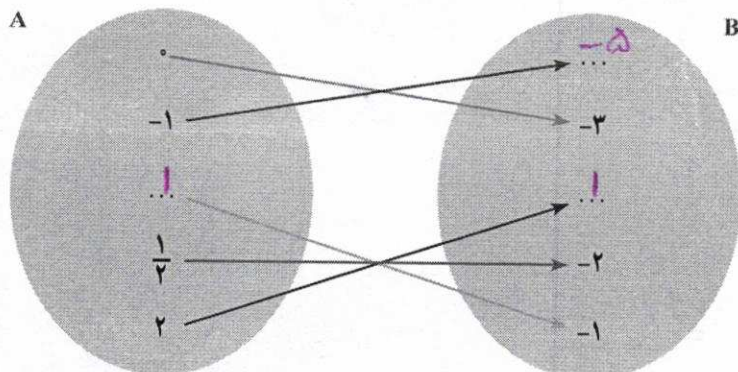
$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$(0, -3)$$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$(1, -1)$$

A



B

سوال خوب

$$D: y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

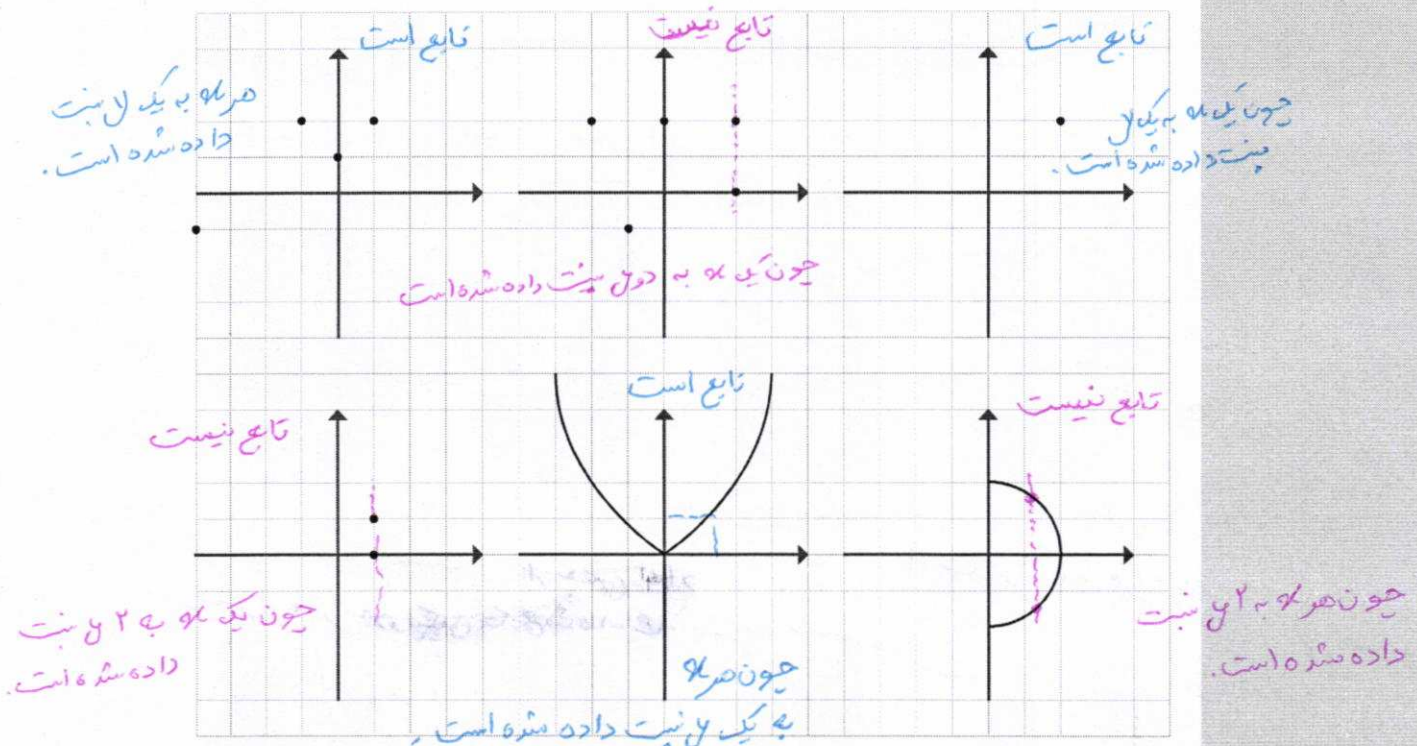
$$E: y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$F: y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$G: y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

۵۷

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

یک شهر ممکن است چند سوغاتی داشته باشد

☒ تابع نیست

☐ تابع است

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

هر فرد یک روز تولد دارد

☐ تابع نیست

☒ تابع است

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

چون ممکن است یک شهر چند نماینده داشته باشد

☒ تابع نیست

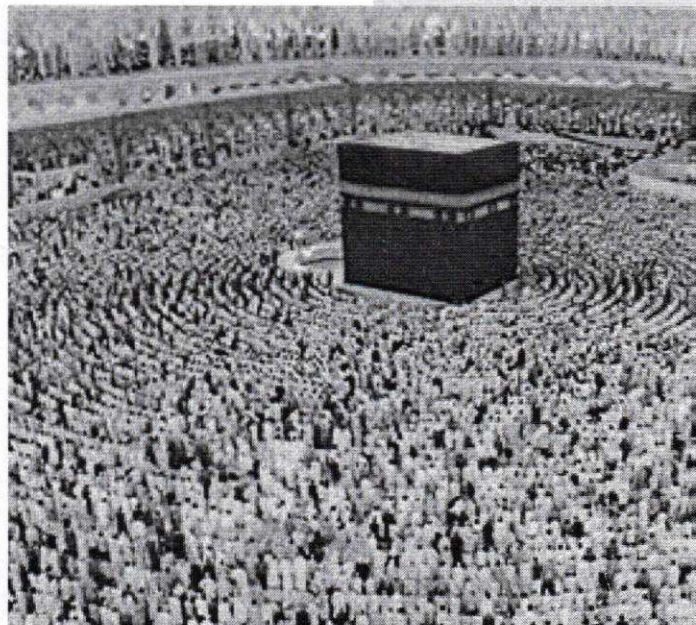
☐ تابع است

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

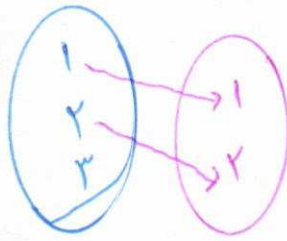
☐ تابع نیست

☒ تابع است

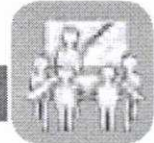
زیرا هر مسلمان یک قبله دارد



در فعالیت زیر بهتر است یک مثال به این صورت نیز آورده شود

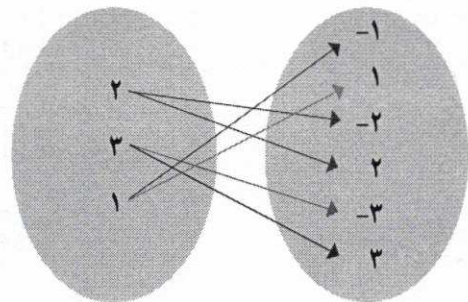
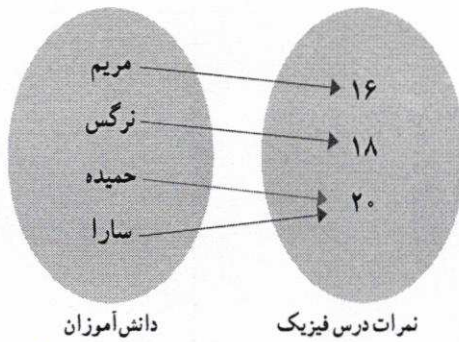


که تابع نیست



فعالیت

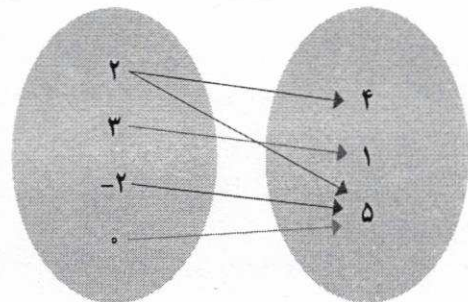
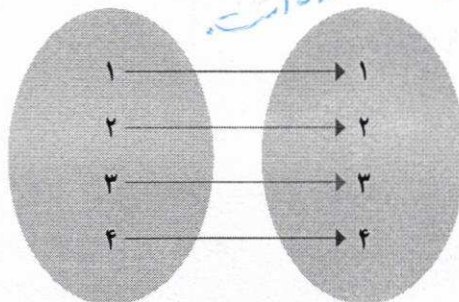
۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟



تابع است. زیرا به هر فرد یک نمره نسبت داده شده.

تابع نیست. زیرا

به هر عضو از مجموعه اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.



تابع است. زیرا

تابع نیست. زیرا

به هر عضو از مجموعه اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(۲,۳), (۳,۳), (۴,۳), (۵,۳)\}$ تابع است.

ب) $G = \{(۴,۱), (۲,-۱), (۱,-۱), (۴,۲)\}$ تابع نیست.

پ) $H = \{(۲,۳)\}$ تابع است.

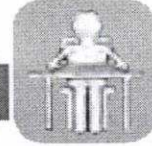
ت) $I = \{(۳,۳)\}$ تابع است.

ث) $J = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۲,۴)\}$ تابع نیست.

تهیه کننده:

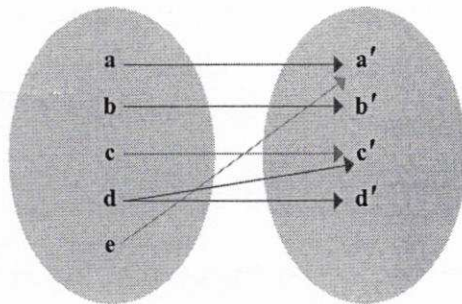
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین



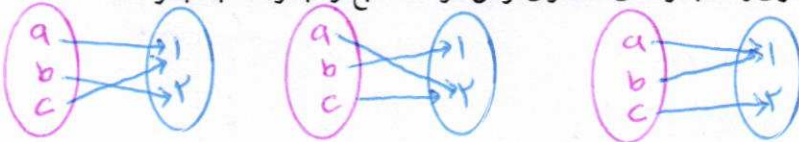
۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

نکته: اگر c حذف شود
به هیچ عضوی وصل نمی شود
و باز هم خود را یک تابع خواهد بود



یا باید a' حذف شود
تا نمودار پیکانی
نمودار یک تابع شود

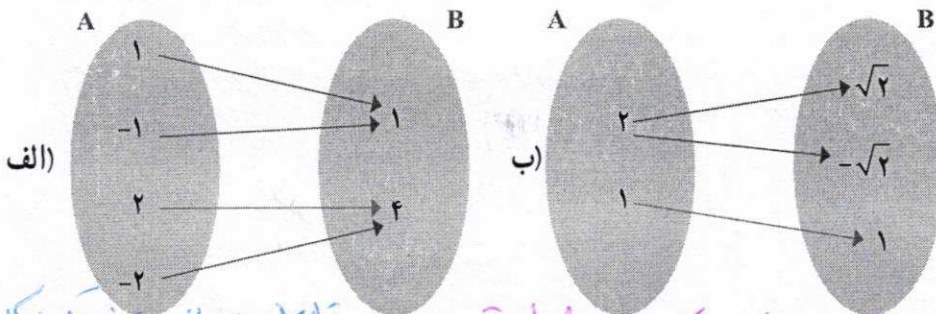
۲. اگر مجموعه ای ۳ عضوی و B مجموعه ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.



۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



$$f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$$

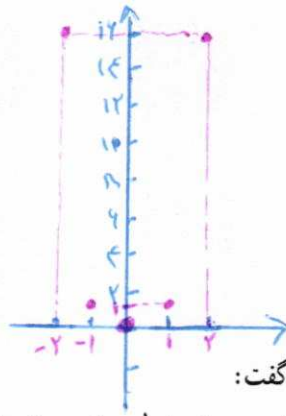
تابع نیست زیرا

دو زوج مرتب متمایز داریم مولفه اول برابر هستند.

ت) رابطه ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می دهد.

تابع است زیرا هر شخص یک شماره ملی

تفصیلات داده می شود

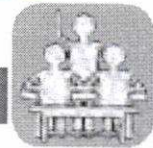


با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می توان گفت:

* اگر رابطه بین x و y را $(x \text{ متغیر مستقل})$ به صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

* اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

* اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.



کار در کلاس

در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش های رابطه ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

جدولی	توصیفی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی	نمایش پیکانی
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A یک واحد بیشتر از آن را نسبت می دهد.	$f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 4 \\ 4 & \rightarrow & 5 \\ 5 & \rightarrow & 6 \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A توان دوم آن را نسبت می دهد.	$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 9 \\ 4 & \rightarrow & 16 \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد.	$f = \{(-2, 16), (-1, 1), (1, 1), (2, 16)\}$	نمودار مالانصفیح	$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ -2 & \rightarrow & 16 \\ -1 & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 16 \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline رضا & 50 \\ امیر & 40 \\ حمید & 70 \\ قاسم & 60 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر فرد مجموعه ورزش مورد علاقه را نسبت می دهد.	$f = \{(\text{رضا}, \text{فوتبال}), (\text{امیر}, \text{تنیس}), (\text{حمید}, \text{والیبال}), (\text{قاسم}, \text{کشتی})\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ \text{رضا} & \rightarrow & \text{فوتبال} \\ \text{امیر} & \rightarrow & \text{تنیس} \\ \text{حمید} & \rightarrow & \text{والیبال} \\ \text{قاسم} & \rightarrow & \text{کشتی} \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline رضا & 50 \\ امیر & 40 \\ حمید & 70 \\ قاسم & 60 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر فرد مجموعه ورزش مورد علاقه را نسبت می دهد.	$f = \{(\text{رضا}, \text{فوتبال}), (\text{امیر}, \text{تنیس}), (\text{حمید}, \text{والیبال}), (\text{قاسم}, \text{کشتی})\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ \text{رضا} & \rightarrow & \text{فوتبال} \\ \text{امیر} & \rightarrow & \text{تنیس} \\ \text{حمید} & \rightarrow & \text{والیبال} \\ \text{قاسم} & \rightarrow & \text{کشتی} \end{array}$

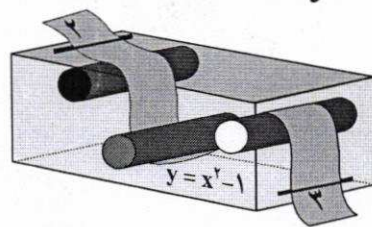
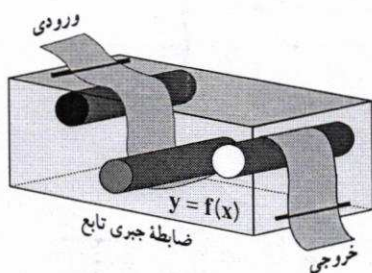
در زیر
کشتی
تیراندازی
والیبال
تنیس
فوتبال

x	y
رضا	فوتبال
امیر	تنیس
حمید	والیبال
قاسم	کشتی

درس ۲

ضابطه جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با



یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به طور مثال تابع

$$f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \right\}$$

در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول

مؤلفه دوم، به دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$

در این صورت $y = x + 3$. معادله $y = x + 3$ را ضابطه

تابع f می‌نامیم. اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم

و x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f

روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y

(متغیر وابسته) است؛ یعنی، $y = f(x)$

متغیر مستقل

دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همه مؤلفه‌های

اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همه مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم.

دامنه تابع f را با D_f ^۱ و بُرد آن را با R_f ^۲ نشان می‌دهیم.

متغیر وابسته

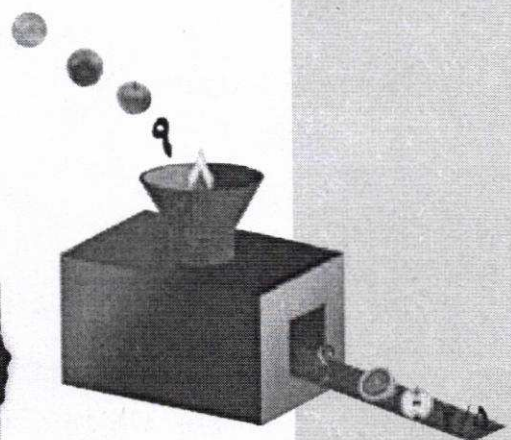
یک تابع مانند f از مجموعه A به مجموعه B ، قانون
با ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو
از مجموعه B را نسبت دهد.

۱. Domain

۲. Range

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۵) الف

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2$$

$$x+y=4 \Rightarrow y=4-x \Rightarrow y=2$$

$$x^2+y^2=(2)^2+(2)^2=4+4=8$$

۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل x^2+y^2 را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه

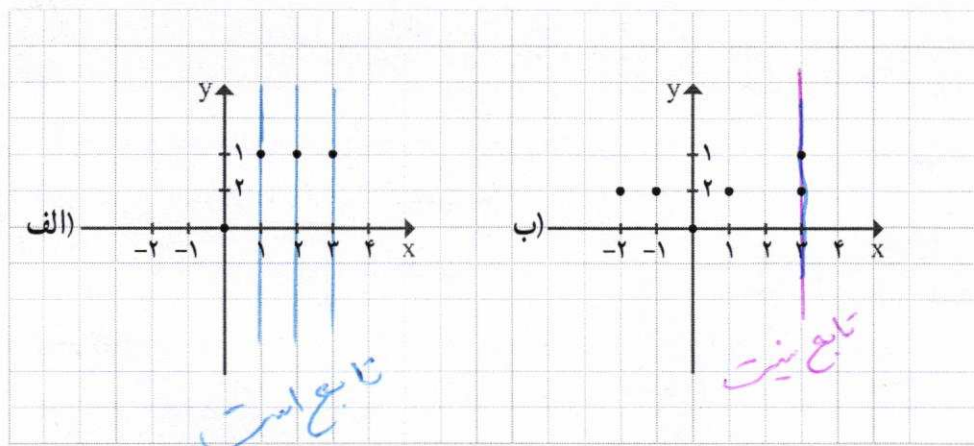
x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

$$(2, x+y) = (2, 4) \Rightarrow x+y=4$$

$$(5, 2) = (5, x-y) \Rightarrow x-y=2$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می کند؟



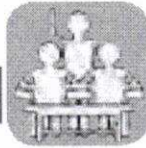
خواندنی

توابع در شاخه های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم گیری های اقتصادی استفاده می شود و یا در فیزیک،

هنگامی که می خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً

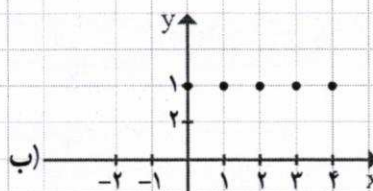
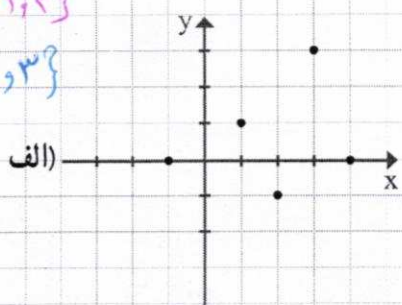
هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می شوند و کاری را بر روی ورودی های خود انجام می دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل سازی ساختمان داده ها و تأثیرات الگوریتم می بینیم.



۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و بُرد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

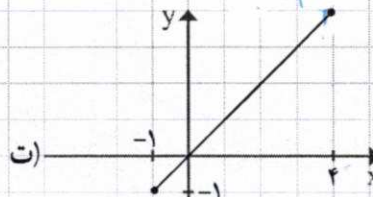
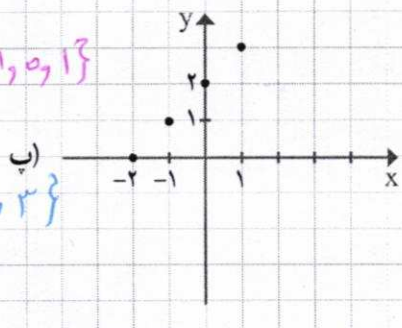
$D_f = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$
 $R_f = \{0, -1, 1, 3\}$



$D_f = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $R_f = B = \{1\}$

$B = R_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$

$A = D_f = \{-2, -1, 0, 1\}$
 $R_f = B = \{0, 1, 2, 3\}$



$A = D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$

بجمله است
 یک ترتیب به همین صورت
 اصل داشته باشد
 نابرابری داشته باشد

۲. دامنه و برد هریک از تابع های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \rightarrow B$ $R = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

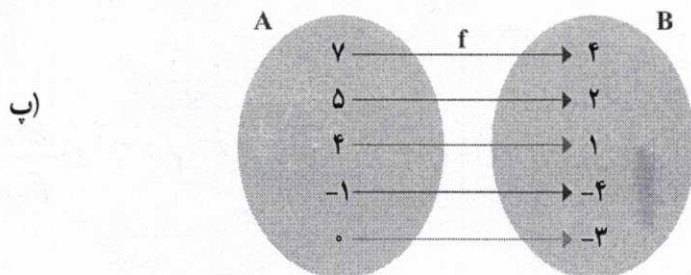
$f(x) = x + 4$ $A = \{2, -1, 0, 1, \dots\}$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

$= \{1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}$
 $= \{-1, -2, -3, -4, -\sqrt{2}\}$

$= \{7, 5, 4, -1, 0\}$

$= \{4, 2, 1, -4, -3\}$



تهیه کننده:

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.

فعالیت



با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 + 1$, $A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$

x	$f(x) = 2x^2 + 1$
-1	$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 3$
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 5$
2	$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$
1	$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 3$
0	$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 2 \times (\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$\rightarrow R_f = \{3, 5, 9, 1, \frac{3}{2}\}$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

$f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3$

$f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$

$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 1 = 5$

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

$f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3$

$f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$

$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 1 = 5$

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^3 - 1$, $A = \{1, -1, 0, 2, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\}$, $B = \{0, -2, -1, 4, 3, 2, \frac{-22}{27}, 7\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3} - 1\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$, $B = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}, -1\}$

$f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = \sqrt{-1+1} - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(8) = \sqrt{8+1} - 1 = 3 - 1 = 2$

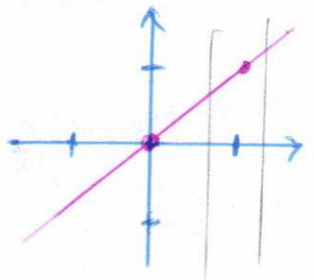
$f(3) = \sqrt{3+1} - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(2) = \sqrt{2+1} - 1 = \sqrt{3} - 1$

$f(-2) = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$, $f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$

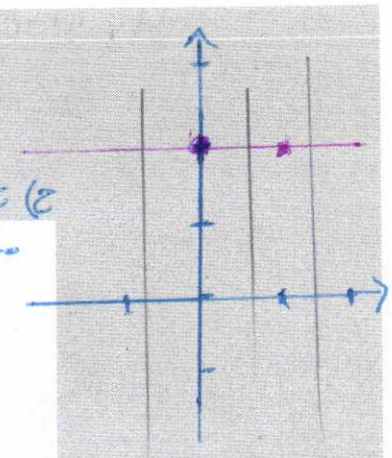
ع) تابع است
 $f(0) = 0$
 $f(1) = 1$



چون هر خط موازی محورین ها نمودار
 واحد اکثر در یک نقطه
 قطع می کنند
 ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

تابع است چو هر خط موازی
 محورین نمودار واحد اکثر در یک نقطه قطع می کنند
 ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2$

$f(0) = 2, f(1) = 2$



۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1, A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$
 $B = \{1, 3, 7\}$

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
 $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
 $f(1) = (1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
 $f(2) = (2)^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$
 $f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}, A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$
 $B = \{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}, A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$
 $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\}$

$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$
 $f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
 $f(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
 $f(4) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
 $f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x, A = W = \{0, 1, 2, \dots\}$
 $B = W = \{0, 1, 2, \dots\}$

$f(0) = 0$
 $f(1) = 1$
 $f(2) = 2$

ث) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0, A = \mathbb{R}$
 $B = \{0\}$

$f(0) = 0$
 $f(1) = 0$
 $f(-100) = 0$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟
 حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^3$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt[3]{x-4}$

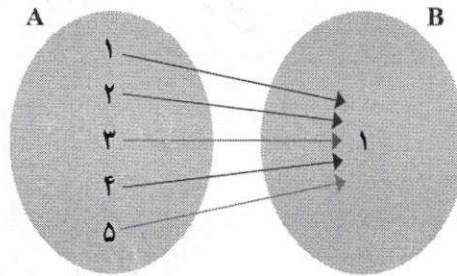
✓ پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^3 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

$f(3) = 2(3)^3 - 4 = 2(27) - 4 = 54 - 4 = 50$

۴. $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1} = 3$
 $f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
 $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$
 $f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$
 $f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ن)



$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

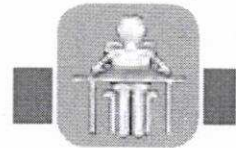
$$= \{1\}$$

ث) $f = \left\{ (1, 1), (2, 2), (3, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0) \right\}$

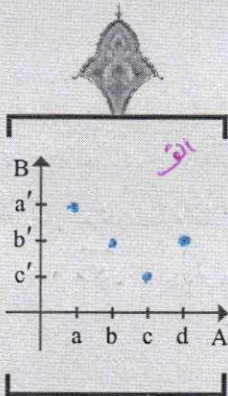
$$\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0\}$$

$$\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0\}$$

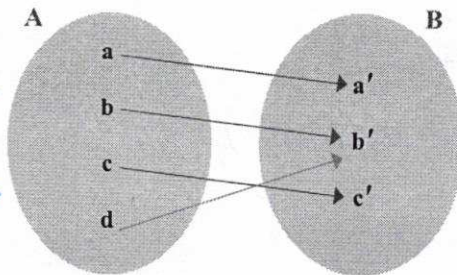
تمرین



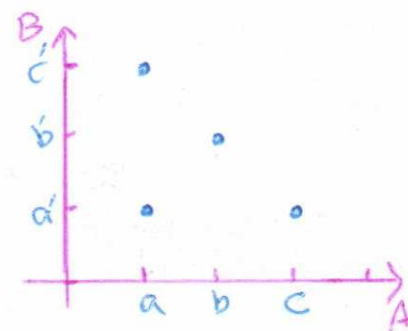
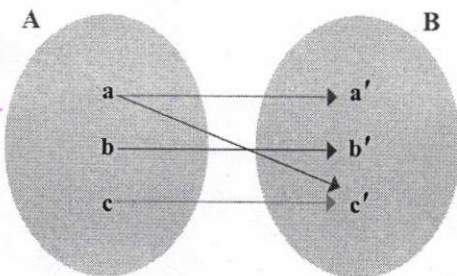
۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



تابع است
چون از هر عضو A یک یونیک خارج شده است.

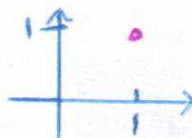


تابع نیست
چون از یک عضو مجموعه A دو یونیک خارج شده است.



پ) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ت) $g = \{(1, 1)\}$

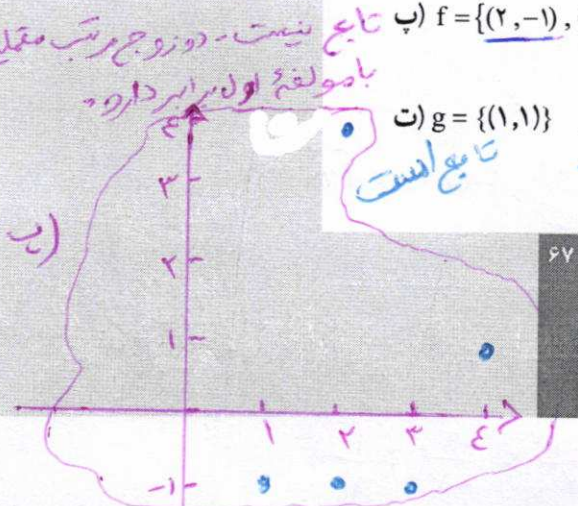
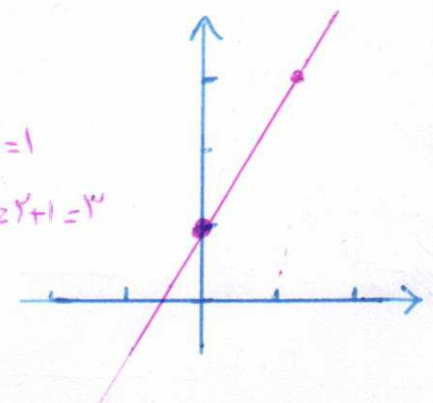


ث) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

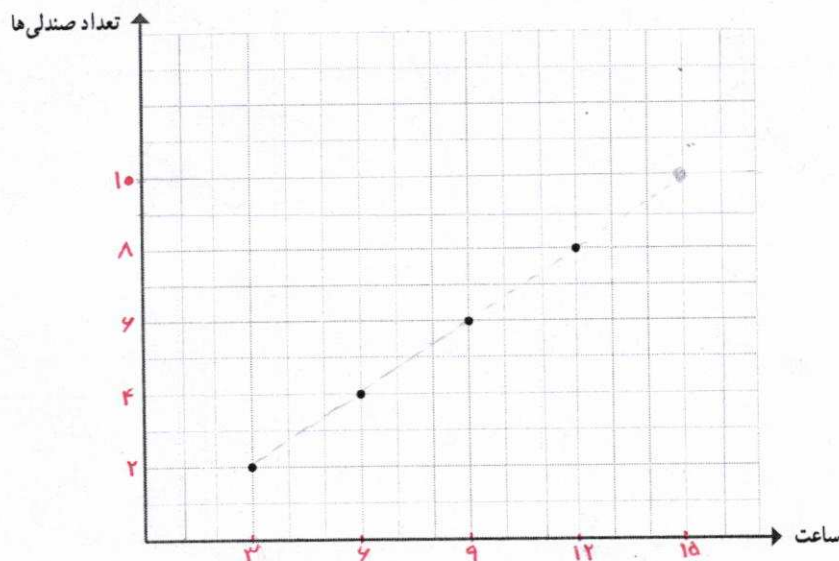
$f(1) = 2(1) + 1 = 3$



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟ **۱۰ آ**



- آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟ **بله**
- آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟ **خیر**

سوره ی فعالیت

فعالیت ۱

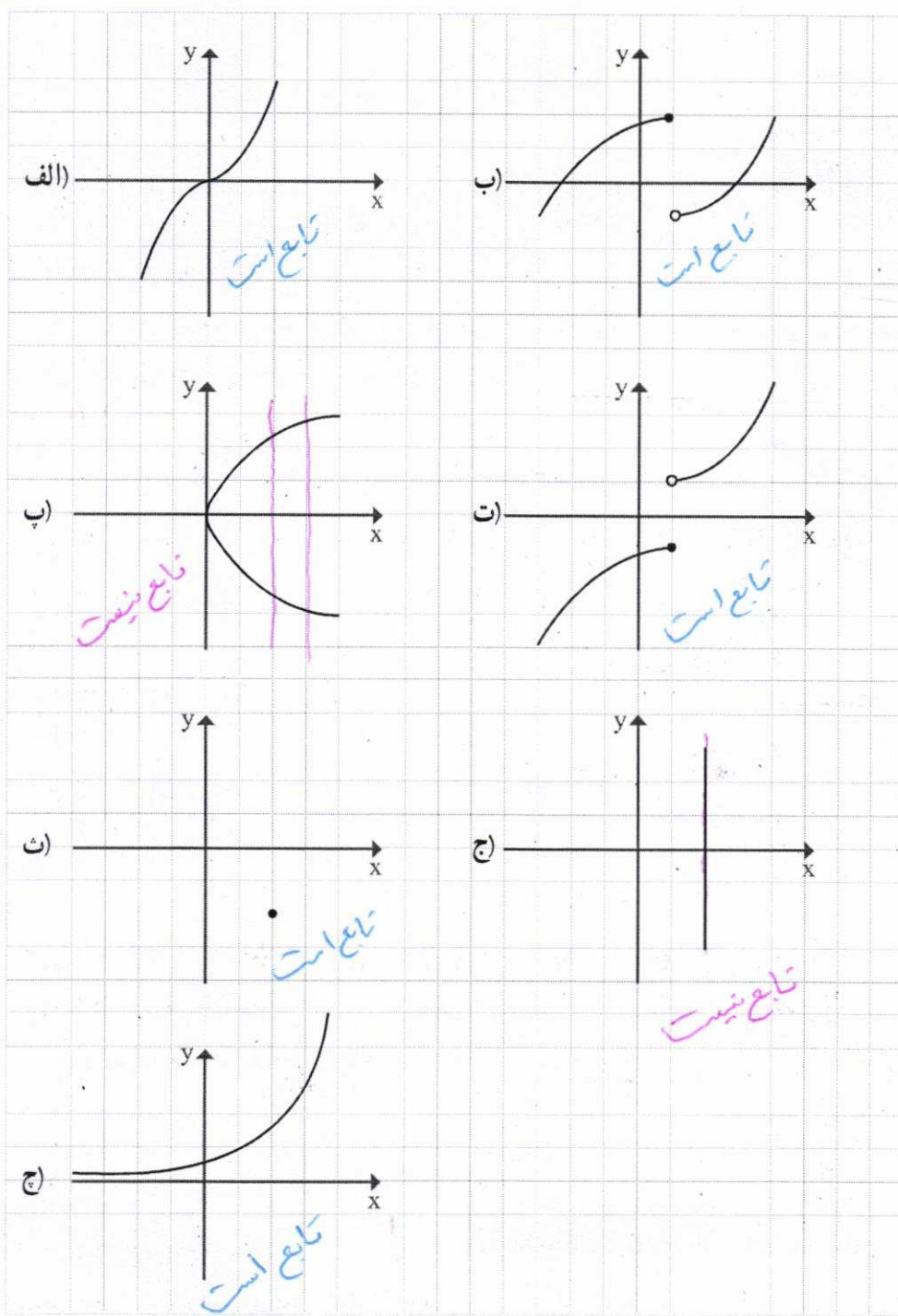


الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می باشد؟ چرا؟



تهیه کننده:

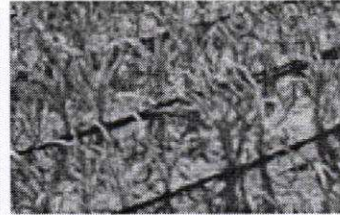
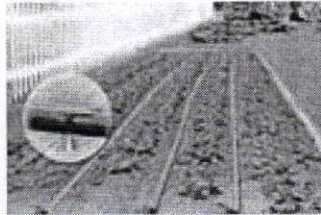
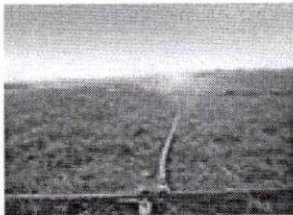
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

شماره‌ی فعالیت

فعالیت ۲

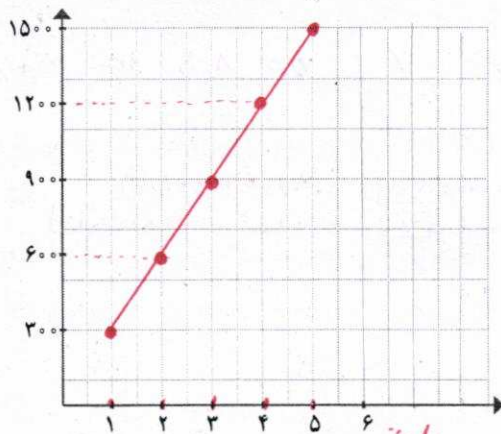


یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی^۱ در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.



x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
f(x) بر حسب متر	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰

اگر متر از لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.



نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

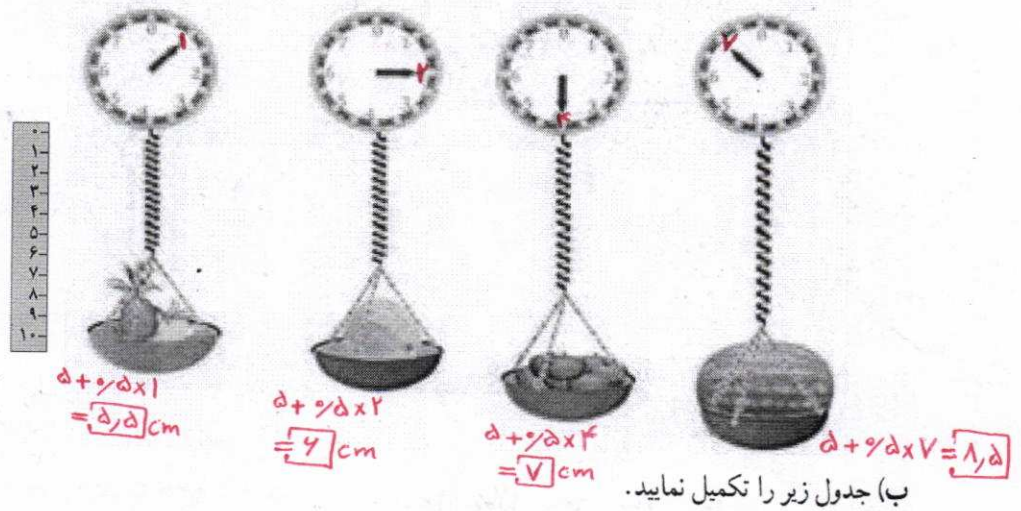
می‌خواهیم به‌عنوان تابع خطی رسم کنیم.

هر تابع به صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$ ، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به دست آمده در فعالیت ۱ و ۲ هر دو توابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیرنفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهنده این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب یا استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف‌کننده آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اتلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آبی‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیر کشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.

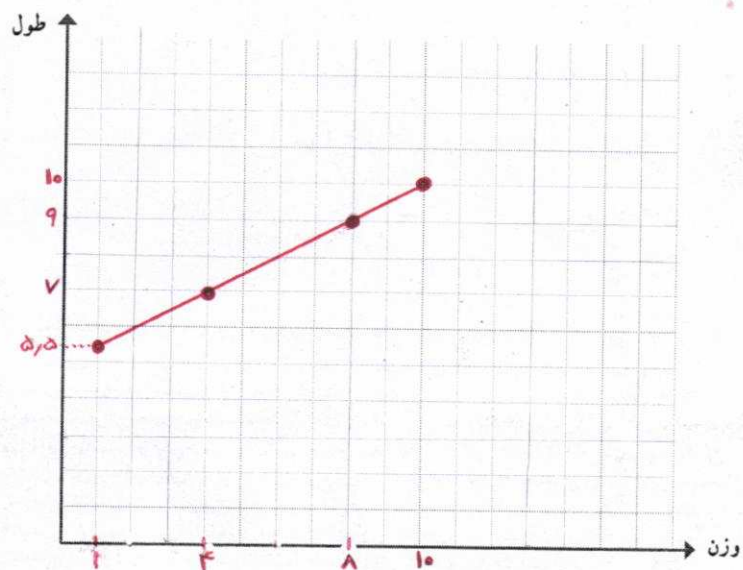


اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتیمتر)	Δ, Δ	7	$7, \Delta$	$1, \Delta$	15	$\Delta + \gamma \Delta x a$

استفاده از فرمول $f(x) = \gamma$

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(10)$, $f(8)$, $f(4)$, $f(1)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$

را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به 44° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

$$44 = 55x - 35$$

$$55x = 79$$

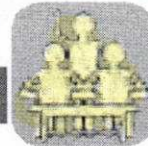
$$x \approx 1.44$$

شیب خط: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	معادله خط یا ضابطه تابع: $y=f(x)=mx+h$	$f(1)$	$f(2)$
$m = \frac{185 - 75}{2 - 1} = 110 = 55$	$(2, 75) \rightarrow 75 = 55 \times 2 + h$ $h = 75 - 110 = -35$ $y = 55x - 35$	20	75

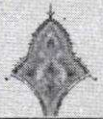
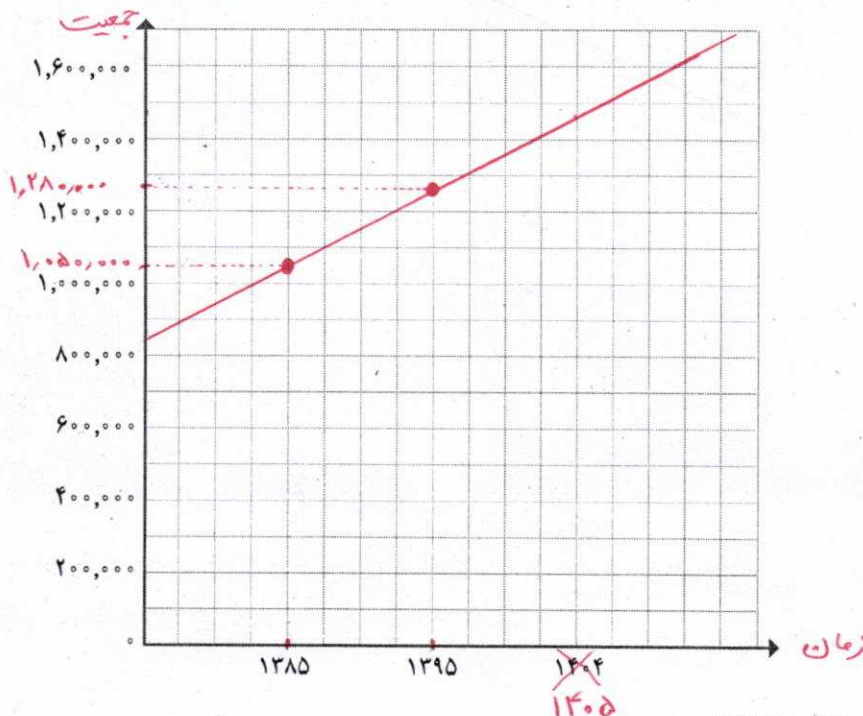
$$x=2 \Rightarrow y = 55 \times 2 - 35 = 75$$

$$x=1 \Rightarrow y = 55 \times 1 - 35 = 20$$

کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پانجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.



نرخ رشد:
به میزان افزایش
یک کمیت
(نظیر جمعیت)
در واحد زمان
نرخ رشد گفته می‌شود.

رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y = mx + h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

کار در کلاس



در یک تابع خطی $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

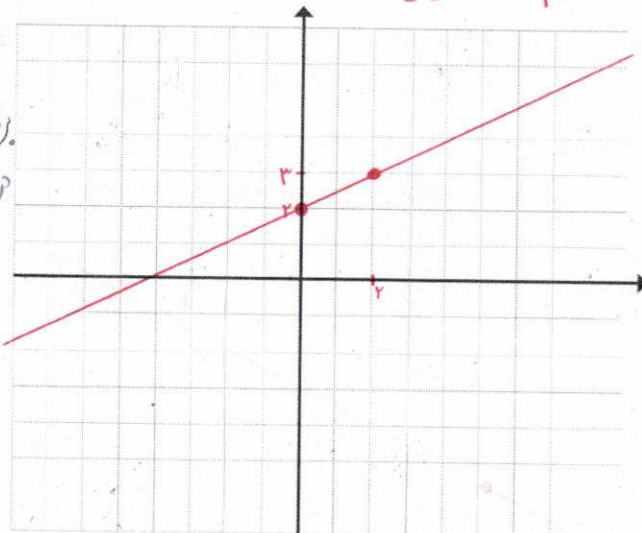
$$m = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + h$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times 0 + h \Rightarrow h = 2$$

$$y = mx + h \Rightarrow \text{معادله خط: } y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\text{بنابراین } y \text{ یا } f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



برای رسم از شرط داده شده در مسئله استفاده کردیم ✓

کار در کلاس



جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$m = \frac{7-0}{2-0} = \frac{7}{2} ; 0 = \frac{7}{2}x + b \Rightarrow b = 0$$

جواب (۵)

$$خط معادله $f(x) = \frac{7}{2}x + 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7}{2}x$$$

$$* f(0/1) = \frac{7}{2} \times 1 = 3.5$$

$$** f(-1) = \frac{7}{2} \times (-1) = -3.5$$

$$** * f(-1) = \frac{7}{2} \times (-1) = -3.5$$

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $A(0, 5)$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/1)$ و $f(-0/1)$ را به دست آورید.

۶. رابطه بین درجه دما بر حسب سانتی گراد و فارانهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

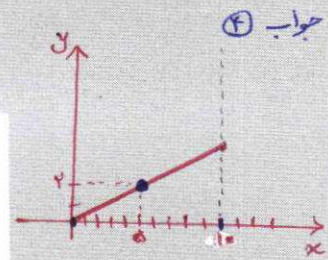
۷. یک شرکت برای تولید x کالا $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری - چابهار



جواب (۶)

$$F = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 36 + 32 = 72$$

$$F = 72$$

جواب (۷) الف)

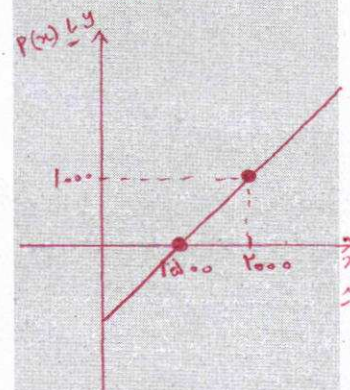
$$R(x) = 70x$$

$$p(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 70x - (3000 + 50x)$$

$$P(x) = 20x - 3000$$

x	1500	2000
y	0	1000



ب)

$$P(x) = 0$$

$$20x - 3000 = 0$$

$$\frac{20x}{20} = \frac{3000}{20} \Rightarrow x = 150$$

لازم باید ۱۵۰۰ بشیر یعنی ۱۵

کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود.

$$x = y + 4$$

$$P = 2(x + y) = 2(y + 4 + y) \Rightarrow P = 2(2y + 4)$$

$$\Rightarrow P = 4y + 8$$

محیط یک تابع خطی است چون به شکل $y = mx + h$ درآمده است.

کار در کلاس



ضابطه تابع محیط مستطیل هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟ خیر

$$S = x \times y = (y + 4) \times y$$

$$S = y^2 + 4y$$

مساحت یک تابع خطی نیست؛ چون به شکل $y = mx + h$ در نیامده است (متغیر با توان ۲ دارد)

کار در کلاس

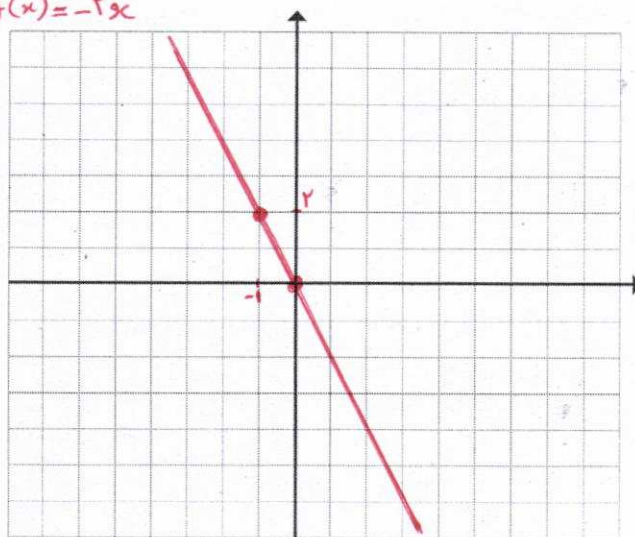


اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

$$m = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$$

$$0 = -2 \times 0 + h \Rightarrow h = 0$$

معادله ضابطه تابع f : $y = f(x) = -2x$



$$m = \frac{f-1}{f-1} = 3$$

$$1 = 3 \times 1 + n \Rightarrow n = 1 - 3$$

$$n = -2$$

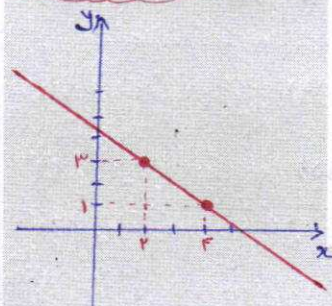
$$f(x) = 3x - 2$$

$$m = \frac{3-1}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$3 = -1 \times 2 + h \Rightarrow h = 3 + 2$$

$$h = 5$$

$$f(x) = -x + 5$$



تمرین



۱) مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(1) = 1$ و $f(2) = 4$.

۲) ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(4, 1)$ می گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳) در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

$$m = \frac{8-5}{2-1} = 3$$

$$5 = 3 \times 1 + h \Rightarrow h = 5 - 3 \Rightarrow h = 2$$

معادله خط: $y = f(x) = 3x + 2$

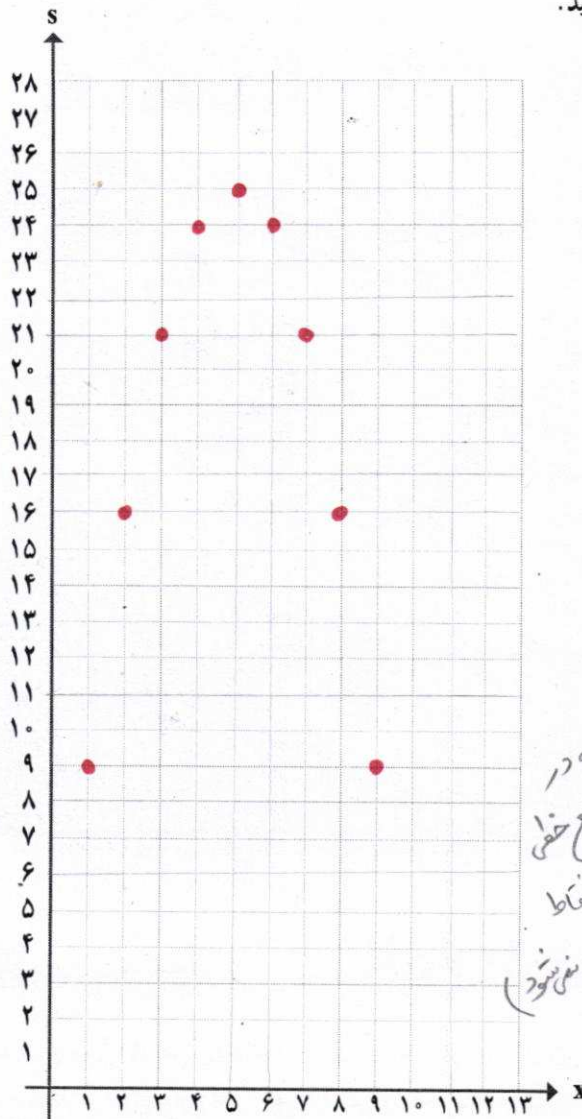
$$f(-3) = 3(-3) + 2 = -9 + 2 = -7$$

$$f(5) = 3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$$

تهیه کننده:

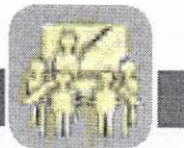
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



با دقت در نقاط مشخص شده در دستگاه، می بینیم که تابع خطی نیست (با وصل کردن نقاط به هم، خط راست ایجاد نمی شود)

فعالیت



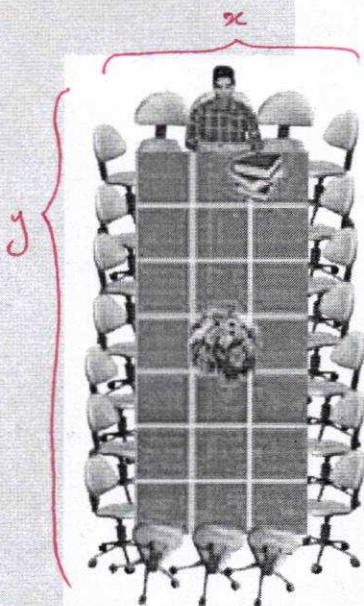
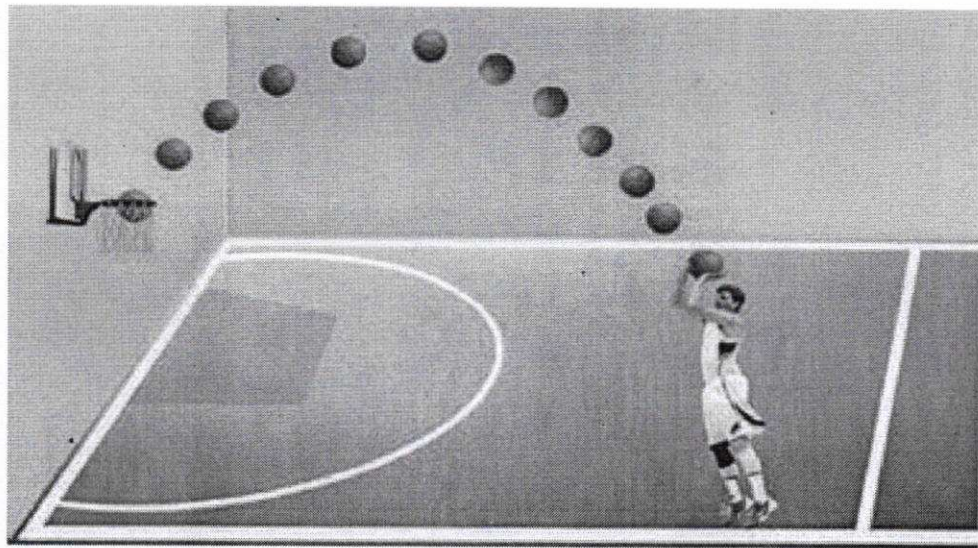
یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $1200 - x$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

میزان درآمدی که شرکت می کند: $R(x) = (1200 - x) \times x$ (درآمد)

میزان هزینه: $C(x) = 30000 + 200x$ (هزینه)

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲



فعالیت



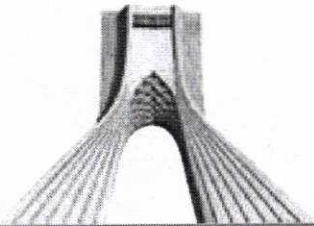
$$\frac{x(x+y)}{2} = 10$$

$$x+y=10$$

برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع هایی 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می دهیم. الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
s	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹
(x,s)	(۱,۹)	(۲,۱۶)	(۳,۲۱)	(۴,۲۴)	(۵,۲۵)	(۶,۲۴)	(۷,۲۱)	(۸,۱۶)	(۹,۹)

با توجه به محیط باید جمع طول و عرض عدد باشد



رسم نمودار تابع درجه دوم

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت $\cup$ یا $\cap$ است که به آن سهمی می گوئیم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است. *محور تقارن منحنی حل شود*

- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cup$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

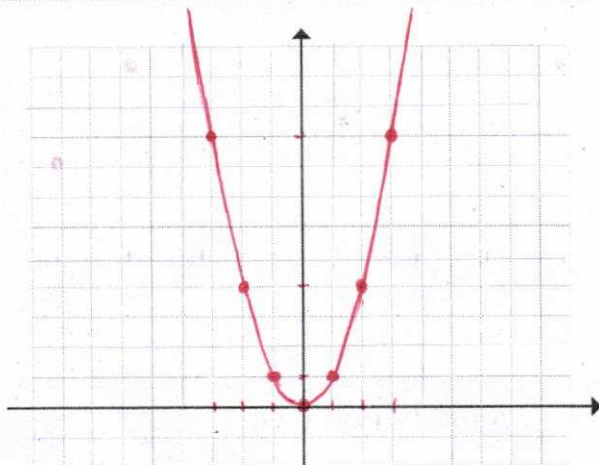
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cap$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید. *درجه ۲ - سهمی*

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...



تهیه کننده:

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x=200$ (متر کار در یک روز)

$x=200 \Rightarrow \text{قیمت} = 1200 - 200 = 1000$ تومان
 $x=300 \Rightarrow \text{قیمت} = 1200 - 300 = 900$ تومان

و $x=300$ چقدر است؟

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x=200$ و $x=300$ چقدر است؟
 $x=200 \Rightarrow \text{هزینه} C(200) = 30000 + 200 \times 200 = 70000$
 $x=300 \Rightarrow \text{هزینه} C(300) = 30000 + 200 \times 300 = 90000$

پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200)$ ، $P(100)$ ، $P(300)$ را محاسبه کنید.

$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = -10400$

$P(100) = 100 \times (1200 - 100) - (30000 + 200 \times 100) = 40000$

$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = 130000$

$P(300) = 300 \times (1200 - 300) - (30000 + 200 \times 300) = 180000$

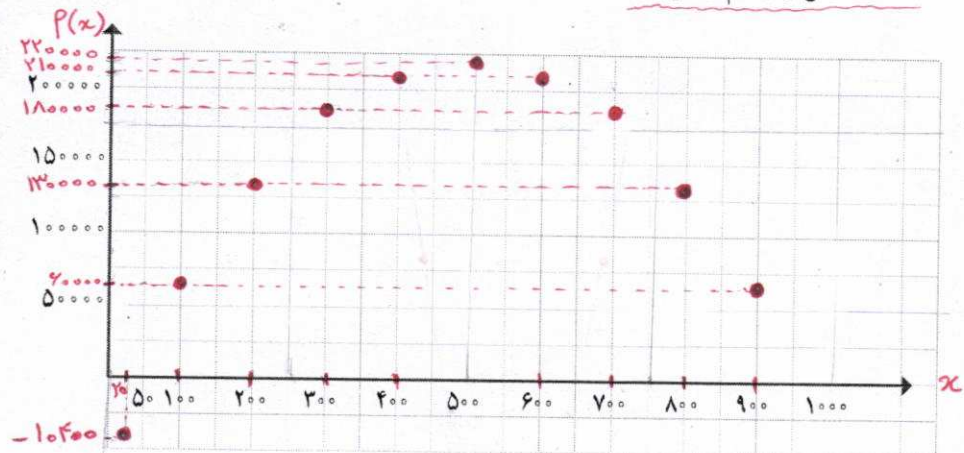
ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید: $P(x) = 1000x - x^2 - 30000$

ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	200	100	200	300	400	500	600	700	800	900
P(x)	-10400	40000	130000	180000	210000	220000	210000	180000	130000	40000

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید.

نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

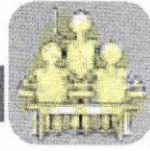


چ) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه مترافز بیشتری رنگ آمیزی شود،

گروه سود بیشتری کسب می کند؟ چون $P(x)$ منفی شده (یعنی شرکت ضرر داشته است)

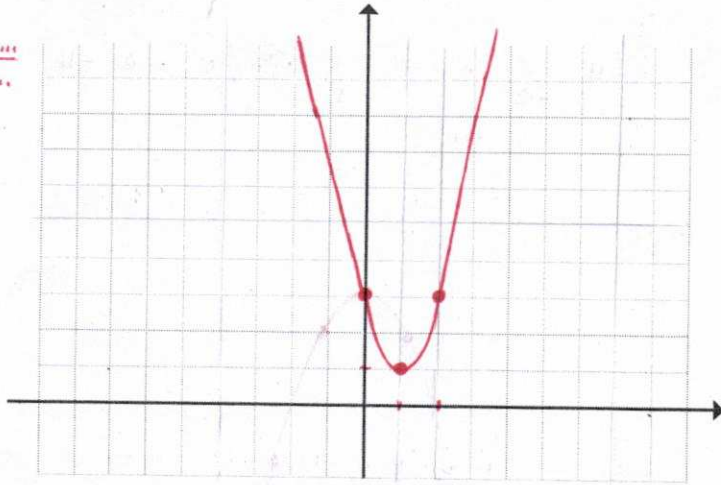
خیر - از $x=500$ به بعد سود کمتر می شود.

کار در کلاس



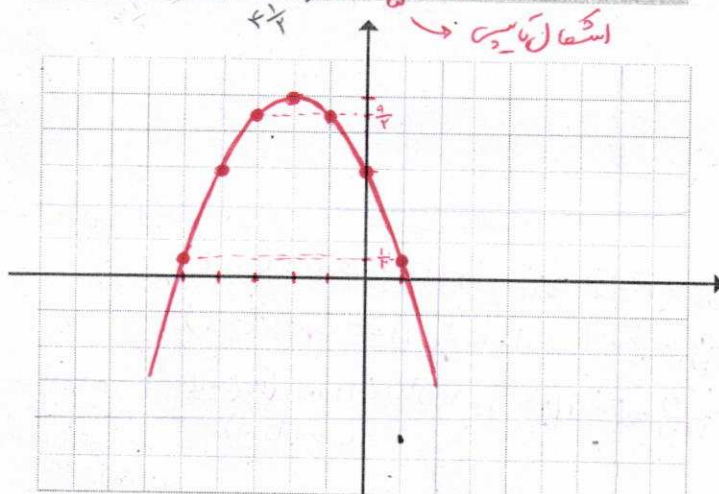
به کمک صفت (ت) کار در کلاس صفته قبل
الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.
رأس سهمی (۱، ۱) داریم

x	...	0	1	2	...
y	...	3	1	3	...



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.
رأس سهمی (-۲، ۵)

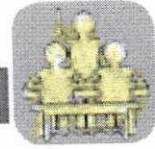
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{9}{4}$	5	$\frac{9}{4}$	3	$\frac{1}{4}$	...



تهیه کننده:

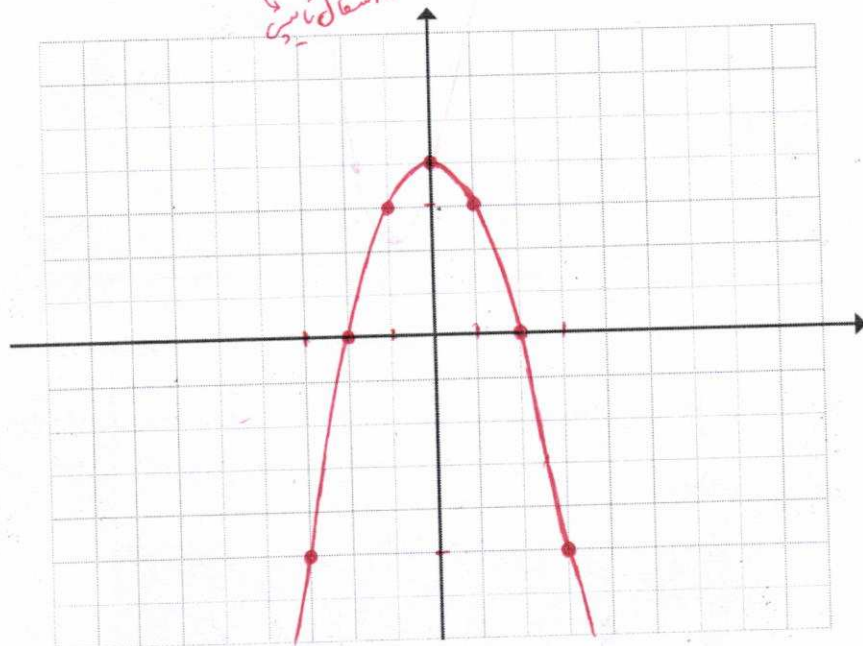
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

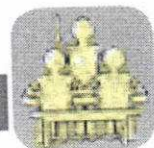


جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	...



کار در کلاس



نقاط رأس سهمی‌هایی را که معادله‌های آنها داده شده است، مشخص کنید.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0 \Rightarrow \text{رأس (0, 0)}$$

الف) $y = x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 - 0^2 = 4 \Rightarrow \text{رأس (0, 4)}$$

ب) $y = 4 - x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = -1 \Rightarrow \text{رأس (1, -1)}$$

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

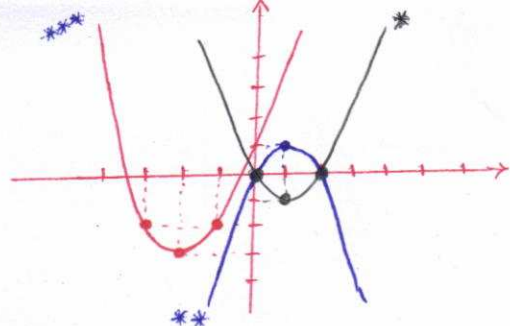
ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$

اول ساده کردن: $y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 1$

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 = 1 \Rightarrow \text{رأس (1, 1)}$$

نویسنده: عرض رأس، همان عدد بعد از پرانتز در لای توان ۲ است. طول رأس، همان عدد در پرانتز در لای توان ۲ است.



*** $y = x^2 + 4x + 1$

x	...	-3	-2	-1	...
y	...	-2	-3	-2	...

*** $y = -(x-1)^2 + 1$

x	...	0	1	2	...
y	...	0	1	0	...

حل ۱ $y = x^2 - 2x$

x	...	0	1	2	...
y	...	0	-1	0	...

تمرین



۱. نمودار سهمی‌های $y = x^2 + 4x + 1$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 - 2x$ را رسم کنید.
۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود. بازای $x = 7.5$
۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پژوهشی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.
 $P(x) = R(x) - c(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100)$
 $P(x) = -x^2 + 160x - 100$

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} = 80$

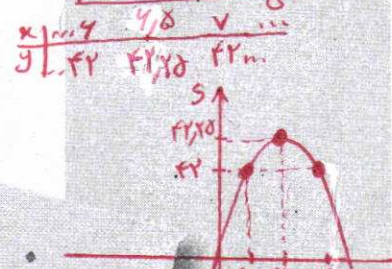
پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟ $x = 80$ را در تابع سود جایگزین می‌کنیم.
 $P(80) = -80^2 + 160(80) - 100 = 6390$

بیشترین سود روزانه کارگاه 6390 است.

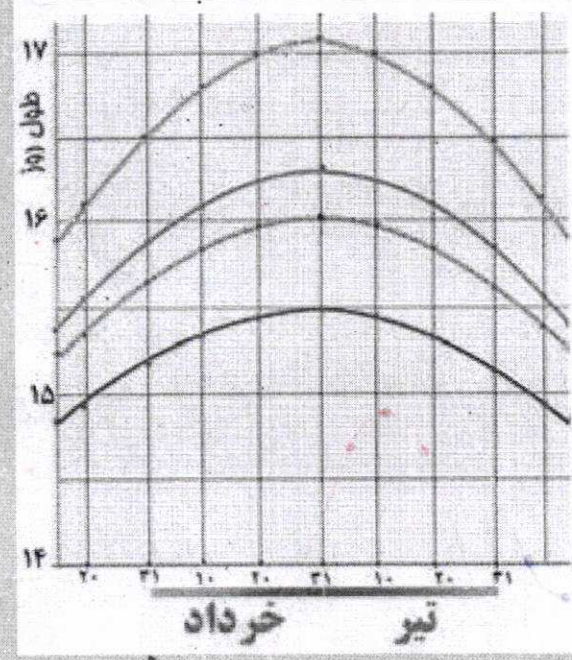
حل ۲ $P(x) = R(x) - c(x)$
 $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x - (18x + 40)$
 $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 40$

درجه ۲ سهمی - ماکسیم در رأس اتفاق می‌افتد
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(12)}{2(-\frac{1}{4})} = 24$
 $x = 24$ ماکسیم
 $P(24) = -\frac{1}{4}(24)^2 + 12(24) - 40 = 32$
 ماکسیم مقدار سود

حل ۳ $P = x(x+y) = 24$
 $x+y = 13 \Rightarrow y = 13-x$
 درجه ۲ سهمی $S = x \cdot y = x(13-x)$
 $S = 13x - x^2$



خواندنی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌باشد. نمودار مقابل نشان می‌دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.



حل ۴ $2x + a = 100 \Rightarrow a = 100 - 2x$

درجه ۲ سهمی $y = xa = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2$

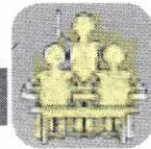
طول را ماکسیم کنیم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$
 $a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$

$y_{max} = x \cdot a = 25 \times 50 = 1250$

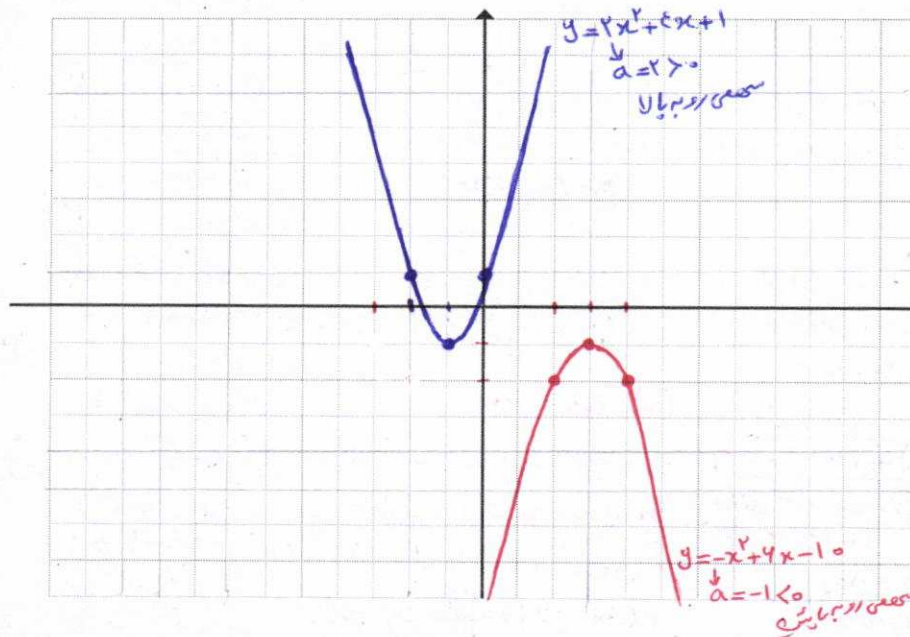
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 4x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



$$y = -x^2 + 4x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

طول رأس

x	...	2	3	4	...
y	...	-2	-1	-2	...

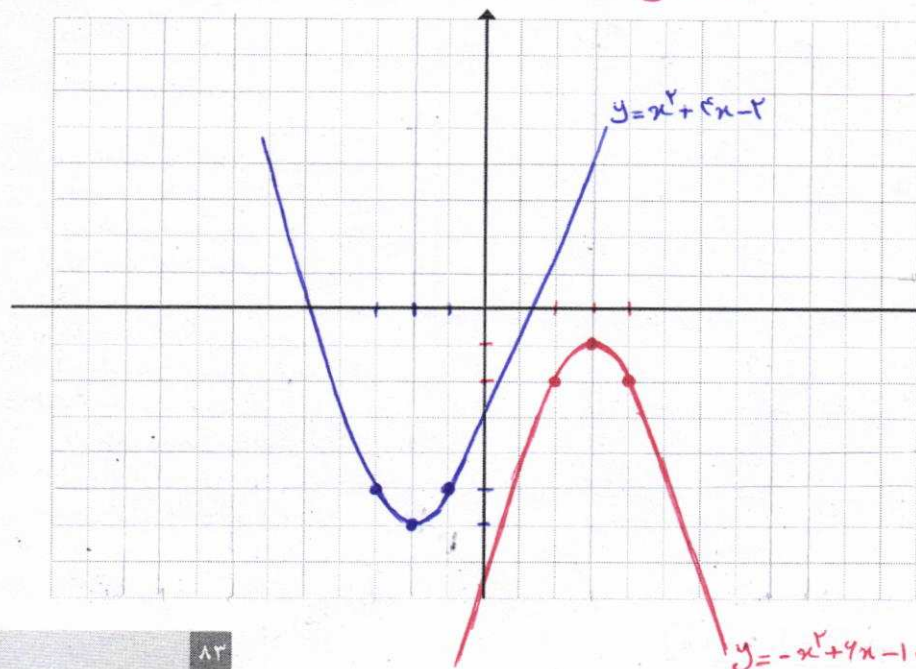
$$y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1$$

طول رأس

x	...	-2	-1	0	...
y	...	1	-1	1	...

۲. نمودار توابع $y = x^2 + 4x - 2$ و $y = -x^2 + 4x - 10$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید. معادله تساوی ندارند.



$$y = -x^2 + 4x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

طول رأس

x	...	2	3	4	...
y	...	-2	-1	-2	...

$$y = x^2 + 4x - 2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2$$

طول رأس

x	...	-3	-2	-1	...
y	...	-5	-2	-1	...